1108
~~256~~ Maximales Ideal ノ擴大ニツイテ

河田　敬義（東京大理大）

ノルム環 R_1 ノ部分環 R_2 ガ同ジノルムニ関シテ又一ツノノルム環ヲ作ルトキニ、何時 R_2 ノ Maximals Ideal (M. I.) ガ R_1 ノ M. I. ニマデ拡大サレルカトイフ問題ニツイテハ例ヘバ G. Silov ノ論文 (Doklady, 29 (1940), S. 83) ガアル。

本論談話 927,（210頁）及ビ 944,（　　）ニ於テ無條件ニコノヤウナ拡大ガ出来ルコトヲ假定シテ証明ヲ

シテキル点ニツイテ角谷氏カラ御注意ナイタバイタ。此処デハ，ソノ場合ニ適用サレル一ツノ M.I. ノ拡大ニ関スル補題ヲ証明シテ前談話ノ補ヒトシタイ。

『補題．任意ノ $x \in \mathfrak{R}_1$ ニ対シテ或ル $\bar{x} \in \mathfrak{R}_1$ ガ對應シテ $\mathfrak{R}_1$ ノスベテノ M.I. M_1 ニ対シテ

$$\bar{x}(M_1) = \overline{x(M_1)}$$

ヲ満足スルモノトスル。

今，$\mathfrak{R}_2 \ni y$ ニ対シテ又 $\mathfrak{R}_2 \ni \bar{y}$ デアレバ $\mathfrak{R}_2$ ノ任意ノ M.I. ハ $\mathfrak{R}_1$ ノ M.I. ニマデ拡大サレル。』

（証明）今 $\mathfrak{R}_2$ ノ一ツノ M.I. M_2 ガ如何ナルモ $\mathfrak{R}_1$ ノ M.I. M_1 ニモ含マレナイトスレバ，各 M_1 ニ対シテ $x_1(M_1) \neq 0$ ナル $x_1 \in M_2$ ガアル。$\mathfrak{R}_1$ ノ M.I. 全体 $\mathfrak{M}_1$ ハ bikompakt ナル故，適當ニ $M_2 \ni x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヲトレバ

$$M_2 \ni y = x_1 \cdot \bar{x}_1 + \cdots\cdots + x_n \cdot \bar{x}_n$$

ハ $\mathfrak{M}_1 \ni M_1$ ニ対シテ常ニ $y(M_1) > 0$ トナル。

今

$$m = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} y(M_1), \quad n = \min_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} y(M_1) > 0$$

トシ

$$z = me - y$$

トオケバ

I. Gelfand, Normierter Ring (Rec. Math., 9, S. 11, Satz 8') カラ $z \in \mathfrak{R}_2$ トミレバ、

$$\lim \sqrt[n]{\| z^n \|} \geq m = |z(M_2)|$$

$z \in \mathcal{R}_1$ トミレバ

$$\lim \sqrt[n]{\| z^n \|} = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |z(M_1)| = m - n$$

トナリ，$n > 0$ ト矛盾スル。（証了）

ツイデニ Silov ノ定理モ紹介シテオカウ。（証明ハ若干簡単ニナル様デアル）

『定理（Silov）　$\mathcal{R}_1$ ニ対シテハ元ノ存在ハ仮定シナイガ，$\mathcal{R}_2 \ni y$ ニ対シテハ補題ノ如キ $\bar{y} \in \mathcal{R}_2$ ノ存在ヲ仮定スル。（即 $\bar{y}(M_2) = \overline{y(M_2)}$）

然ラバ $\mathcal{R}_2$ ノ任意ノ M.I. ハ $\mathcal{R}_1$ ノ M. I. ニ延長サレル。』

（証明）（I）　$\mathcal{R}_1$ ノ M.I. 全体ヲ $\mathfrak{M}_1$，$\mathcal{R}_2$ ノ M. I. 全体ヲ $\mathfrak{M}_2$ ト書ク。

先ヅ，スベテノ $M_2 \in \mathfrak{M}_2$ ニ対シテ $x(M_2) =$ reell （$x \in \mathcal{R}_2$）ナラバスベテノ $M_1 \in \mathfrak{M}_1$ ニ対シテモ $x(M_1) =$ reell トナル。

何トナレバ $x - (a + bi)$ （$b \neq 0$）ハ $\mathcal{R}_2$ 中逆元ヲモツ。$\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$ ナラ $x(M_1) \neq$ reell ナル $M_1 \in \mathfrak{M}_1$ ハアリ得ナイ。

之レカラ $x \in \mathcal{R}_2$ ニ対スル $\bar{x} \in \mathcal{R}_2$ ハ

$$\bar{x}(M_1) = \overline{x(M_1)}, \quad M_1 \in \mathfrak{M}_1$$

トナルコトガワカル。

何トナレバ $\frac{1}{2}(x+\bar{x})$, $\frac{1}{2i}(x-\bar{x})$ ニツイテ上ノ場合ヲ適用スレバヨイ。

之レカラアトハ補題ノ証明ト全ク同ジデアル。

(II) 別証。

$\mathfrak{M}_1 \ni M_1$ ニ対シテ $M_1 \frown \mathfrak{R}_2 = M_2$ ヲ作リ, ソノ全体ヲ $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}_2$ トスル。コノ $M_1 \longrightarrow M_2$ ノ對應ハ $\mathfrak{M}_1$ in $\mathfrak{M}_2$ ノ連續対應デ, $\mathfrak{M}_1$ ガ *bikompakt* デアルカラ, $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{M}_2$ 中閉集合デアル。

今 $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_2$ トシテ矛盾ニ導ク. $\mathfrak{M}_2$ ハ *bikompakt normal* デアルカラ $M_2^0 \in \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}$ ニ対シテ

$$f(M_2^0) = 1, \quad f(M_2) = 0, \quad M_2 \in \mathfrak{M}$$

ナル $\mathfrak{M}_2$ 上ノ実連續函数 f ガ存在スル。$\mathfrak{R}_2$ ノ x ニ對シテ $\bar{x}$ ノ存在スルトイフ假定カラ *Gelfand, Satz* 16 カラアル $x \in \mathfrak{R}_2$ ニ対シテ

$$|f(M_2) - x(M_2)| < \varepsilon, \quad M_2 \in \mathfrak{M}_2$$

ガ成立スル。再ビ *Gelfand, Satz* 8' カラ,

$$\mathfrak{R}_2 \ni x, \qquad \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = \max_{M_2 \in \mathfrak{M}_2} |x(M_2)| \geqq 1 - \varepsilon$$

$$\mathfrak{R}_1 \ni x, \qquad \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x(M_1)|$$

$$= \max_{M_2 \in \mathfrak{M}} |x(M_2)| \leqq \varepsilon$$

即チ矛盾ヲ生ジタ。

(西大 二三六八)